

Gekoppelte Berechnung der Durchkontaktierungen in Leiterplatten unter elektrischer Belastung

A coupled computation of vias in circuit boards under electrical loading

Dr.-Ing. B. Emek Abali*, Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller*, Dr.-Ing. Hans Walter†

* Technische Universität Berlin, Fachgebiet Kontinuumsmechanik und Materialtheorie, Berlin, Deutschland

† Fraunhofer, Institut für Zuverlässigkeit und Mikrointegration, Berlin, Deutschland

Kurzfassung

Die Durchkontaktierungen in Leiterplatten leiten elektrischen Strom und erzeugen somit Wärme, die thermische Spannungen aufgrund des unterschiedlichen Ausdehnungsverhaltens verursachen. Mit Ein- und Ausschalten des elektronischen Bauteils treten die thermischen Spannungen zyklisch auf. Diese liegen über der Streckgrenze der Durchkontaktierung, so dass die zyklische Dissipation in dem System am Ende der Lebensdauer zum Versagen führt. Um die Lebensdauer des Systems abzuschätzen, benötigen wir eine realitätsnahe Berechnung der Dissipation in jedem Zyklus. Die Interaktion der Bilanzgleichungen mit den MAXWELLSchen Gleichungen führt auf ein System der gekoppelten partiellen Differentialgleichungen, welches nur mithilfe eines Forschungscode gelöst werden kann. Wir präsentieren in dieser Arbeit die notwendigen Gleichungen und ihre numerische Lösung bei einer Durchkontaktierung in einer Leiterplatte unter elektrischer Belastung.

Abstract

In circuit boards the vias conduct electricity and produce heat leading to thermal stresses between board and via owing to their different thermal expansion coefficients. These thermal stresses are cyclic since we switch the electronic device on and off. Moreover, these stresses are higher than the yield stress of via such that the cyclic dissipation causes fatigue. In order to estimate the number of failure due to fatigue we need a realistic computation. By augmenting the balance equations with MAXWELL's equations we obtain a system of coupled field equations. This system can be solved by a research code. We briefly present the governing equations and a computation of a via in a circuit board under electrical loading.

1 Einführung und Motivation

Durchkontaktierungen in einer Leiterplatte haben vorrangig die Aufgabe, elektrische Verbindungen zwischen den Bauelementen herzustellen. Gegenwärtige Entwicklungen in der Leiterplatte führen bei gleichzeitiger Miniaturisierung der Bauelemente zu einem deutlichen Anstieg der Leiterzüge (Schalterzüge). Dadurch kann die Zahl der elektrischen Funktionen in einer Leiterplatte wesentlich gesteigert werden. Die höheren Schalungsdichten erzeugen jedoch in der Leiterplatte höhere Verlustwärmern, die vom Basismaterial stets abgeführt werden müssen.

Die Leiterplatte setzt sich aus unterschiedlichen Materialien (Kupfer, Epoxidharz, Glasgewebe) mit verschiedenen Ausdehnungskoeffizienten zusammen, so dass die erzeugte Wärme zu thermischen Spannungen innerhalb der Leiterplatte führt. Mit dem Wechsel von Ein- und Ausschaltvorgängen treten diese thermischen Spannungen zyklisch auf.

In jedem Zyklus können die thermischen Spannungen sogar über der Streckgrenze der Durchkontaktierung (Kupfer) liegen. In diesem Fall treten plastische Deformationen in jedem Zyklus auf.

Diese zyklische Dissipation in dem System akkumuliert in jedem Zyklus und führt am Ende zum Versagen der Durchkontaktierungen. Eine akkurate Abschätzung der Lebensdauer des Systems ist von daher von großer Bedeutung und ist nur bei einer realitätsnahen Berechnung der Dissipation in jedem Zyklus möglich.

Die Temperatur und die mechanische Deformation, die durch die elektrisch erzeugte Wärme induziert werden, können mit Hilfe der Bilanzgleichungen für Masse, Impuls und Energie berechnet werden.

Um die Interaktion der elektromagnetischen Felder mit dem Kontinuumskörper zu modellieren, werden die Bilanzgleichungen mit den MAXWELLSchen Gleichungen erweitert. Dies führt auf ein System der gekoppelten und

nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen. So ein System kann mit einem Forschungscode linearisiert und gelöst werden.

In diesem Beitrag werden die notwendigen Gleichungen und deren Implementierung in den Forschungscode FE-niCS, sowie die numerische Lösung bei einer Durchkontaktierung in einer Leiterplatte unter elektrischer Belastung vorgestellt und diskutiert.

2 Kontinuumsmechanische Bestimmungsgleichungen

Zur Berechnung der Verschiebung, u_i , der Temperatur, T , des elektrischen Potentials, ϕ , und des magnetischen Potentials, A_i , werden aus den Bilanzgleichungen und MAXWELLSchen Gleichungen die notwendigen Gleichungen hergeleitet, siehe [2] für die detaillierte Herleitung der Materialgleichungen. In diesem Beitrag nennen wir die Bestimmungsgleichungen und wenden sie an.

Alle Variablen sind in der materiellen Konfiguration (die sogenannte LAGRANGESche Darstellung) für kleine Deformationen im kartesischen Koordinatensystem berechnet. Darüberhinaus nehmen wir an, dass die Materialien, glassfaserverstärktes Epoxyd und Kupfer, beide nicht polarisierbar sind. Wir benutzen die übliche EINSTEINSche Summationskonvention, sowie „ \cdot “ für partielle Zeitableitung und „ \cdot_i “ für die partielle Ortsableitung nach der X_i Komponente. Für die Berechnung der Verschiebung wird die Impulsbilanz benutzt:

$$\rho u_i^{\cdot\cdot} - \sigma_{ji,j} - \rho f_i = \rho f_i^{\text{Lor}}, \quad (1)$$

wobei die spezifische Kraft aufgrund der Gravitation, f_i , sowie die Massendichte, ρ , gegeben sind. Der Produktionsterm der Impulsbilanz für unpolarisierte Materialien ist als die spezifische Lorentz Kraft,

$$f^{\text{Lor}} = \rho z E_i + \epsilon_{ijk} J_j B_k, \quad (2)$$

definiert. Die Spannung, σ_{ji} , wird demnächst eingeführt.

Für das elektrische Feld, E_i , und die magnetische Flussdichte, B_i , sind aus der Lösung der MAXWELLSchen Gleichungen die folgenden Relationen bekannt:

$$E_i = -\phi_{,i} - A_i^{\cdot}, \quad B_i = \epsilon_{ijk} A_{k,j}, \quad (3)$$

wobei ϵ_{ijk} das LEVI-CIVITA Symbol ist. Die Potentiale, ϕ , A_i , sind die Zielgrößen zu berechnen.

Zur Berechnung der Temperatur wird die Entropiebilanz benutzt:

$$\rho \eta^{\cdot} + \left(\frac{q_i}{T} \right)_{,i} - \rho \frac{r}{T} = \Sigma, \quad (4)$$

wobei die spezifische Entropie, η , im Folgenden eingeführt wird und der spezifische Zufuhrterm, r , wie z. B. der volumetrische Zufuhr aufgrund der Strahlung beim Laserschweißen oder in einem Mikrowellenofen, bekannt ist.

Für ein unpolarisiertes Material wird der Entropieproduktionsterm, Σ , wie folgt:

$$\Sigma = -\frac{q_i}{T^2} T_{,i} + \frac{J_i}{T} \mathcal{E}_i + \frac{d\sigma_{ji}}{T} v_{i,j}, \quad (5)$$

hergeleitet. Der erste Term ist eine Entropieerhöhung wegen des Wärmeflusses, q_i . Der zweite Term ist die sogenannte JOULEsche Wärme und aufgrund des Stromflusses in einem Leiter. Der dritte Term ist die innere Reibung, die bei der mechanischen Deformation auftritt, wobei die Geschwindigkeit, $v_i = u_i^{\cdot}$, ist. Die elektromotorische Kraft oder auch das sogenannte objektive elektrische Feld ist wie folgt definiert:

$$\mathcal{E}_i = E_i + \epsilon_{ijk} v_j B_k. \quad (6)$$

Der materielle oder objektive Stromfluss, J_i , ist gegeben als:

$$J_i = J_i - \rho z v_i, \quad (7)$$

und wird im Folgenden mit dem geeigneten Materialmodell definiert.

Mithilfe der thermodynamischen Prinzipien werden die spezifische Entropie, η , die Spannung, σ_{ij} , sowie der Wärmefluss, q_i , und der materielle Stromfluss, J_i , hergeleitet; für ein lineares Material bekommen wir:

$$\begin{aligned} \eta &= c \ln \left(\frac{T}{T_{\text{ref}}} \right) + C_{ijkl} \alpha_{kl} v \epsilon_{ij}, \\ {}^r \sigma_{ij} &= -C_{ijkl} \alpha_{kl} (T - T_{\text{ref}}) + C_{ijkl} \epsilon_{kl}, \\ q_i &= -\kappa T_{,i} + \varsigma \pi T \mathcal{E}_i, \\ J_i &= \varsigma \pi T_{,i} + \varsigma \mathcal{E}_i. \end{aligned} \quad (8)$$

Mit der Einführung einer sogenannten thermischen Dehnung:

$${}^t \epsilon_{ij} = \alpha_{ij} (T - T_{\text{ref}}), \quad (9)$$

wird der Spannungstensor umgeschrieben:

$${}^r \sigma_{ij} = C_{ijkl} (\epsilon_{kl} - {}^t \epsilon_{kl}). \quad (10)$$

Diese Schreibweise ist nützlich zur Erweiterung des Modells in der Plastizitätstheorie.

Zur Berechnung des elektrischen Potentials, ϕ , wird für Leiter und Isolatoren unterschiedliche Gleichungen vonnöten. Für elektrisch leitende Materialien, hier, Via aus Kupfer, wird aus der Bilanz der elektrischen Ladung:

$$J_{i,i} = 0, \quad (11)$$

unter der Voraussetzung hergeleitet, dass die Gesamtanzahl der Ladungen konstant bleiben. Für unpolarisierbare Isolatoren, hier, die faserverstärkte Leiterplatte, benutzen wir:

$$D_{i,i} = 0, \quad (12)$$

da bei den Isolatoren $\varsigma = 0$ und somit $J_i = 0$ ist. Für das Ladungspotential, D_i , und Strompotential, H_i , gelten die MAXWELL-LORENTZ Äther Relationen:

$$D_i = \epsilon_0 E_i, \quad H_i = \frac{1}{\mu_0} B_i, \quad (13)$$

mit den universellen Konstanten:

$$\begin{aligned}\epsilon_0 &= 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ A s / (V m) ,} \\ \mu_0 &= 12,6 \cdot 10^{-7} \text{ V s / (A m) .}\end{aligned}\quad (14)$$

Zur Berechnung des magnetischen Potentials wird die folgende MAXWELL Gleichung benutzt:

$$-\frac{\partial D_i}{\partial t} + \epsilon_{ijk} H_{k,j} = J_i . \quad (15)$$

Die totale Spannung, $\sigma_{ij} = {}^r\sigma_{ij} + {}^d\sigma_{ij}$, bringen wir ad hoc mit der Plastizität zusammen:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}(\epsilon_{kl} - {}^l\epsilon_{kl} - {}^p\epsilon_{kl}) , \quad (16)$$

ohne thermodynamische Begründung, was in der Literatur üblich ist. Die Berechnung wird inkrementell in der Zeit durchgeführt:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + \Delta t \dot{\sigma}_{ij} , \quad (17)$$

mit den bekannten Spannungswerten von dem letzten Zeitschritt, σ_{ij}^0 . Die Spannungsrate wird anhand:

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}(\dot{\epsilon}_{kl} - {}^l\dot{\epsilon}_{kl} - {}^p\dot{\epsilon}_{kl}) , \quad (18)$$

berechnet, mit der noch zu bestimmenden plastischen Dehnrate. Hiermit benutzen wir die übliche plastische Dehnrate mit der kinematischen Verfestigung:

$$\begin{aligned}{}^p\dot{\epsilon}_{mn} &= \langle \gamma \rangle \frac{(\sigma_{|ij|}^0 - \beta_{ij}^0) C_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} (\sigma_{|mn|}^0 - \beta_{mn}^0)}{\frac{4}{9} h \sigma_Y^2 + (\sigma_{|ij|}^0 - \beta_{ij}^0) C_{ijkl} (\sigma_{|kl|}^0 - \beta_{kl}^0)} , \\ \beta_{ij} &= \beta_{ij}^0 + \Delta t \dot{\beta}_{ij} , \\ \dot{\beta}_{ij} &= \frac{(\sigma_{|kl|}^0 - \beta_{kl}^0) \dot{\sigma}_{kl}}{\frac{2}{3} \sigma_Y^2} (\sigma_{|ij|}^0 - \beta_{ij}^0) ,\end{aligned}\quad (19)$$

wobei zur numerischen Vereinfachung die Werte vom letzten Zeitschritt benutzt werden. Bei kleinen Zeitschritten ist diese Annahme realistisch, siehe [3] für eine Anwendung in der Mikromechanik.

Somit sind alle Bestimmungsgleichungen abgeschlossen und können gelöst werden. Das System der Gleichungen ist gekoppelt und nichtlinear. Die Bestimmungsgleichung der Verschiebung in Gl. (1) beinhaltet ϕ in der LORENTZ Kraft und auch T im Spannungstensor. Die Bestimmungsgleichung der Temperatur in Gl. (4) beinhaltet ϕ und auch Nichtlinearitäten in dem Produktionsterm. Wir werden dieses System im folgenden Abschnitt numerisch lösen. Wir wissen aus [2], dass das magnetische Potential im Leiter entlang des Stromflusses eingerichtet und somit rotationsfrei sein wird. Somit entsteht auch keine magnetische Flussdichte, $B_i = 0$. Dies werden wir in der Implementierung anwenden und somit die Berechnung des magnetischen Potentials sparen. Die zu berechnende Felder reduzieren auf das elektrische Potential, ϕ , die Verschiebung, u_i , und die Temperatur, T .

3 Modellierung und die numerische Implementierung

Die Leiterplatte besteht aus faserverbundverstärktes Material, ist elektrisch isolierend und weist ein rein elastisches, orthotropes Verhalten auf. Das Kupfermaterial ist elektrisch leitend, hat eine kubische Gitterstruktur und deformiert sich plastisch mit der kinematischen Verfestigung. Der Steifigkeitstensor, C_{ijkl} , wird in der VOIGTSchen Notation, C_{IJ} , gegeben:

$$\begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1113} & C_{1112} \\ & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2213} & C_{2212} \\ & & C_{3333} & C_{3323} & C_{3313} & C_{3312} \\ & & & C_{2323} & C_{2313} & C_{2312} \\ \text{sym.} & & & & C_{1313} & C_{1312} \\ & & & & & C_{1212} \end{pmatrix} . \quad (20)$$

Zur Vereinfachung benutzen wir alle Materialparameter gemessen in der Raumtemperatur und halten sie konstant. Somit hat die Leiterplatte die Steifigkeitsmatrix, C_{IJ}^{LP} , in MPa:

$$\begin{pmatrix} 66242 & 41797 & 37814 & 0 & 0 & 0 \\ & 50460 & 32290 & 0 & 0 & 0 \\ & & 31591 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2250 & 0 & 0 \\ \text{sym.} & & & & 2250 & 0 \\ & & & & & 6630 \end{pmatrix} \quad (21)$$

wobei sie aus Messungen in Fraunhofer stammen und die Ausdehnungskoeffizienten, α_{ij}^{LP} , Massendichte, ρ^{LP} , Wärmekapazität, c^{LP} , Wärmeleitfähigkeit, κ^{LP} , wie folgt

$$\begin{aligned}\alpha_{ij}^{\text{LP}} &= \begin{pmatrix} 13,2 & 0 & 0 \\ 0 & 16,7 & 0 \\ 0 & 0 & 39 \end{pmatrix} \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1} , \\ \rho^{\text{LP}} &= 2,5 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3 , \quad c^{\text{LP}} = 800 \text{ J/(kg K)} , \\ \kappa^{\text{LP}} &= 1,3 \text{ W/(K m)} ,\end{aligned}\quad (22)$$

siehe [1]. Der Leiter aus Kupfer hat die Steifigkeitsmatrix, C_{IJ}^{Cu} , in GPa:

$$\begin{pmatrix} 169,1 & 122,2 & 122,2 & 0 & 0 & 0 \\ & 169,1 & 122,2 & 0 & 0 & 0 \\ & & 169,1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 75,42 & 0 & 0 \\ \text{sym.} & & & & 75,42 & 0 \\ & & & & & 75,42 \end{pmatrix} \quad (23)$$

und die weiteren Parameter wie folgt

$$\begin{aligned}\alpha_{ij}^{\text{Cu}} &= \begin{pmatrix} 17 & 0 & 0 \\ 0 & 17 & 0 \\ 0 & 0 & 17 \end{pmatrix} \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1} , \\ \rho^{\text{Cu}} &= 8,94 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3 , \quad c^{\text{Cu}} = 390 \text{ J/(kg K)} , \\ \kappa^{\text{Cu}} &= 385 \text{ W/(K m)} , \quad \zeta^{\text{Cu}} = 116 \cdot 10^4 \text{ S/mm} , \\ \pi^{\text{Cu}} &= 68 \cdot 10^{-6} \text{ V/K} .\end{aligned}\quad (24)$$

Alle Parameter sind aus [1], [6, Table 10], [5]. Der Parameter ζ^{Cu} entspricht 2% des Kupfermaterials, so dass

die Widerstände in der Leitung berücksichtigt werden.

Für die numerische Implementierung benutzen wir die finite Differenzenmethode in der Zeit und diskretisieren alle partielle Zeitableitungen wie folgt, zum Beispiel für ein beliebiges Feld a :

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \frac{a - a^0}{\Delta t} . \quad (25)$$

Diese Methode ist stabil für reelle Probleme und auch bezüglich der inkrementellen Methode in der Plastizität die korrekte Wahl. Im Ort benutzen wir die finite Elementenmethode mit den Testfunktionen, $\delta\phi$, δu_i , δT , vom gleichen SOBOLEV Raum wie die Felder, ϕ , u_i , T , und generieren die schwache Form:

$$\text{Form} = F_\phi + F_{\mathbf{u}} + F_T \quad (26)$$

aus den Bestimmungsgleichungen:

$$\begin{aligned} F_\phi &= \int_{\Omega^{\text{Cu}}} (-\Delta t J_i \delta\phi_{,i}) dV + \int_{\partial\Omega^{\text{Cu}}} \Delta t J_i \delta\phi n_i dA + \\ &+ \int_{\Omega^{\text{Lp}}} (-D_i \delta\phi_{,i}) dV + \int_{\partial\Omega^{\text{Lp}}} D_i \delta\phi n_i dA , \\ F_{\mathbf{u}} &= \int_{\Omega} \left(\rho \frac{v_i - v_i^0}{\Delta t} \delta u_i + \sigma_{ji} \delta u_{i,j} - \rho f_i \delta u_i \right) dV - \\ &- \int_{\partial\Omega} \sigma_{ji} \delta u_i n_j dA , \\ F_T &= \int_{\Omega} \left(\rho(\eta - \eta^0) \delta T - \Delta t \frac{q_i}{T} \delta T_{,i} - \Delta t \rho \frac{r}{T} \delta T - \right. \\ &\left. - \Delta t \Sigma \delta T \right) dV + \int_{\partial\Omega} \Delta t \frac{q_i}{T} \delta T n_i dA . \end{aligned} \quad (27)$$

Auf der freien Oberflächen sind die Randbedingungen in $F_{\mathbf{u}}$ null. Für die Temperatur benutzen wir eine natürliche Randbedingung:

$$q_i n_i = h(T - T_{\text{ref}}) , \quad (28)$$

mit der Wärmeleitung zwischen der Körper und Umgebung geregelt durch den Faktor, h . Weil weder der Leiter noch der Insulator normal zur Oberfläche Strom leiten, sind die Randbedingungen in F_ϕ null. Diese nichtlineare Form ist mithilfe vom Forschungscode FEniCS 1.6, der die Pakete aus dem FEniCS Projekt [4] benutzt, symbolisch linearisiert und numerisch gelöst worden. Dieser Forschungscode ist frei zugänglich und alle Pakete sind quelloffen. Der Code wurde in Python geschrieben und mithilfe FEniCS Pakete in C++ umgewandelt, kompiliert, durch die Trilinos Solver gelöst.

4 Ergebnisse

Eine aktive Messung einer Leiterplatte mit einem Kupfer-Via ist simuliert worden. Die Geometrie ist in Salome 7.5 erstellt worden und besteht aus einer 10×5 mm Leiterplatte der Dicke 1.5 mm und aus ein einziges Via, siehe Abbildung 1. Der Strom wird durch den Unterschied in ϕ an beiden Enden erzeugt. Ein Ende wird geerdet, 0 V, und

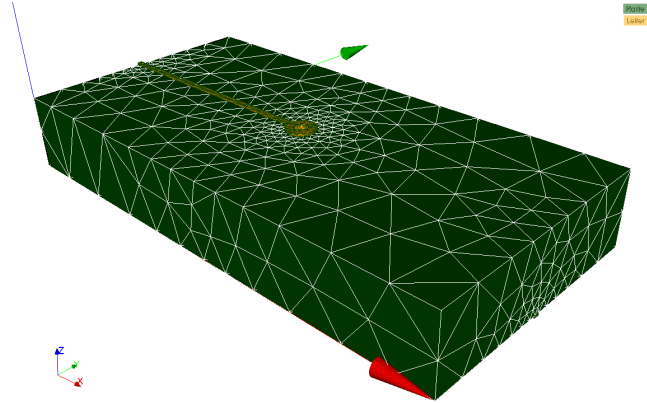


Abbildung 1 Die Leiterplatte (grün) und Kupfer-Via (braun), erstellt und vernetzt in Salome 7.5.

das andere Ende wird harmonisch alterniert: $5 \sin(2\pi\nu t)$, wobei der maximale Wert 5 V wird und die Frequenz als $\nu = 10$ Hz gewählt ist. Der Potentialunterschied induziert einen elektrischen Strom, der wiederum JOULEsche Wärme produziert und die Temperatur erhöht. Ein Teil der Wärme wird zur Umgebung verteilt, obwohl dieser Prozess langsamer als die Taktung des elektrischen Stromes, 10 Hz, ist. Deshalb erhöht die Temperatur im Körper. Aufgrund der unterschiedlichen Ausdehnungsverhalten von der Leiterplatte und Kupfer werden thermische Spannungen erzeugt. Sie sind so hoch, dass eine zusätzliche plastische Deformation in jedem Zyklus vom elektrischen Potential erzeugt wird. Nach 1 Sekunde, nämlich nach 10 Zyklen, ist der Temperaturzustand, sowie die akkumulierte plastische Vergleichsdehnung ist der Abbildung 2 zu entnehmen. Die akkumulierte plastische Vergleichsdehnung ist ein geeignetes Maß zur Abschätzung der Lebensdauer solcher Systeme, siehe [1] und [3] für eine Abschätzung basierend auf die Vergleichsdehnung.

5 Zusammenfassung

Die Ermüdung der Durchkontaktierungen erfolgt durch die thermischen Spannungen und daraus erzeugter plastischen Deformation. Bei einer aktiven Messung kann dieses Verhalten beschleunigt generiert werden, in der der Potentialunterschied zyklisch in einem hohen Takt appliziert wird. In dieser Arbeit haben wir dieses Verhalten mit einer Simulation der gekoppelten, nichtlinearen, partiellen Differentialgleichungen dargestellt. Diese Möglichkeit öffnet die Tür zu einem besseren Verständnis dieser komplizierten Interaktion in dem System. Der vorgeschlagene Herangehensweise, so wie das angewandte numerische Verfahren soll mit den Experimenten verifiziert werden. Danach können durch die weiteren Simulationen konkrete Verbesserungsvorschläge bei der Geometrie der Leiterbahnen und Vias zur Verringerung der mechanischen Dissipation in Form der Plastizität und somit Verlängerung der Lebensdauer des elektronischen Bauteils gemacht werden.

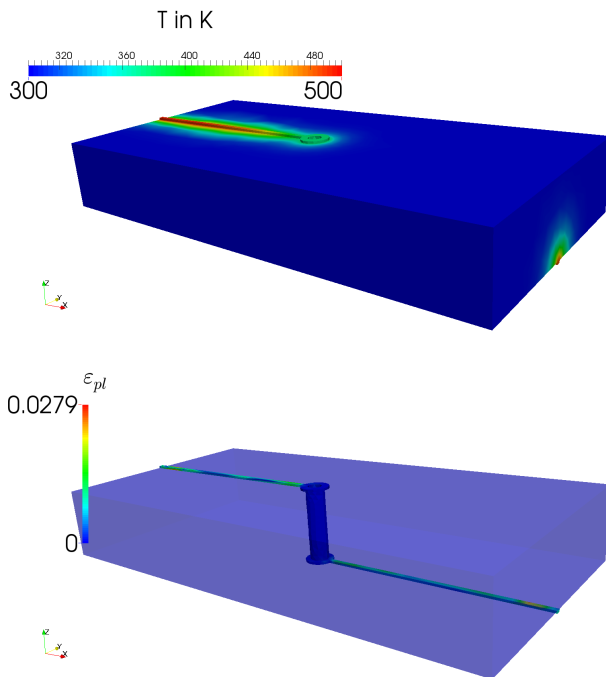


Abbildung 2 Nach 1 Sekunde die Temperaturverteilung (oben) und die Verteilung der akkumulierten plastischen Vergleichsdehnung (unten), dargestellt in ParaView 4.0.

6 Literatur

- [1] Abali, B. E., Lofink, P., and Müller, W. H. 2014a. Untersuchung der Variation der Materialkennwerte zur Lebensdauerabschätzung für Durchkontaktierungen in Leiterplatten. DVS-Berichte, 301:297–303.
- [2] Abali, B. E. and Müller, W. H. 2015. Numerical modeling of thermoelectric coupling. In: S. Elgeti and J.-W. Simon (Editor), Conference Proceedings of the YIC GACM 2015. Publication Server of RWTH Aachen University, pages 1–4.
- [3] Abali, B. E., Reich, F. A., and Müller, W. H. 2014b. Fatigue analysis of anisotropic copper-vias in a circuit board. GMM, Mikro-Nano-Integration, VDE Verlag, Berlin, pages 92–95.
- [4] Alnaes, M. S. and Mardal, K.-A. 2012. Automated solution of differential equations by the finite element method, the FEniCS book, chapter 15 Syfi and sfc: symbolic finite elements and form compilation. Springer.
- [5] Deutsches Kupferinstitut 2014. Kupfer in der Elektrotechnik – Kabel und Leitungen. www.kupferinstitut.de.
- [6] Ledbetter, H. and Naimon, E. 1974. Elastic properties of metals and alloys. ii. copper. Journal of physical and chemical reference data, 3(4):897–935.